第2講　指数・対数関数

1 (1)　t は正の実数であり，$t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}=-3$ を満たすとする。このとき

$$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=\boxed{\text{アイ}}$$

である。さらに

$$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{\boxed{\text{ウエ}}},\quad t-t^{-1}=\boxed{\text{オカキ}}$$

である。

（1は次ページに続く。）

(2) x，y は正の実数とする。連立不等式

$$\begin{cases} \log_3\left(x\sqrt{y}\right) \leqq 5 & \cdots\cdots① \\ \log_{81}\dfrac{y}{x^3} \leqq 1 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

について考える。

$X=\log_3 x$，$Y=\log_3 y$ とおくと，①は

$\boxed{\text{ク}}\,X+Y \leqq \boxed{\text{ケコ}}$ ……③

と変形でき，②は

$\boxed{\text{サ}}\,X-Y \geqq \boxed{\text{シス}}$ ……④

と変形できる。

X，Y が③と④を満たすとき，Y のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{セ}}$ である。また，x，y が①，②と $\log_3 y=\boxed{\text{セ}}$ を同時に満たすとき，x のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ソ}}$ である。

2 (1) $\log_{10}2=0.3010$ とする。このとき，$10^{\boxed{ア}}=2$，$2^{\boxed{イ}}=10$ となる。
$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ に当てはまるものを，次の⓪〜⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ 0　　① 0.3010　　② -0.3010

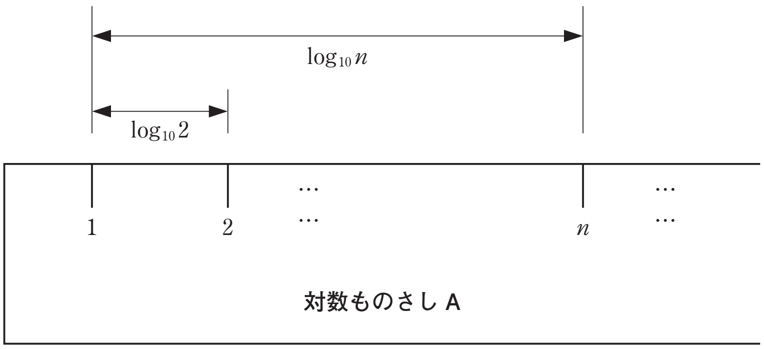
③ 0.6990　　④ -0.6990　　⑤ $\dfrac{1}{0.3010}$

⑥ $-\dfrac{1}{0.3010}$　　⑦ $\dfrac{1}{0.6990}$　　⑧ $-\dfrac{1}{0.6990}$

(2) 次のようにして**対数ものさしA**を作る。

対数ものさしA

2以上の整数 n のそれぞれに対して，1の目盛りから右に $\log_{10}n$ だけ離れた場所に n の目盛りを書く。



(i) **対数ものさしA**において，3の目盛りと4の目盛りの間隔は，1の目盛りと2の目盛りの間隔 $\boxed{ウ}$。$\boxed{ウ}$ に当てはまるものを，次の⓪〜②のうちから一つ選べ。

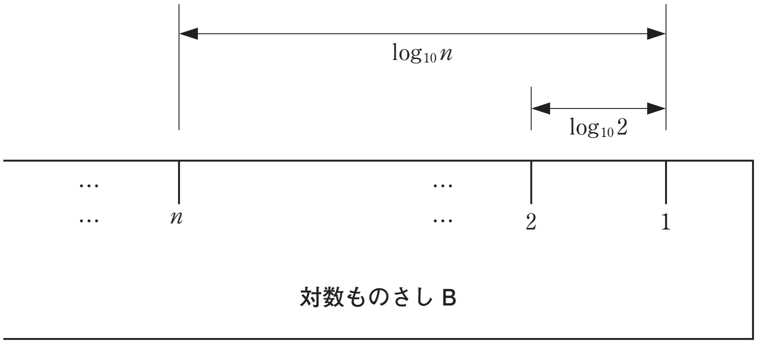
⓪ より大きい　　① に等しい　　② より小さい

(2は次ページに続く。)

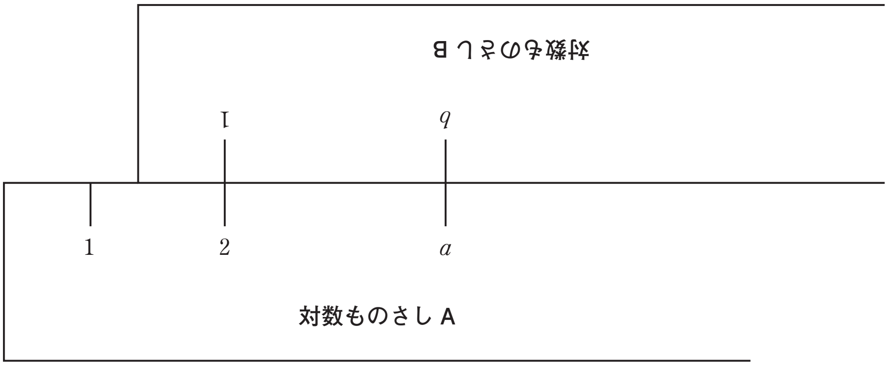
また，次のようにして**対数ものさしB**を作る。

対数ものさしB

2 以上の整数 n のそれぞれに対して，1 の目盛りから左に $\log_{10}n$ だけ離れた場所に n の目盛りを書く。



(ii)　次の図のように，**対数ものさしA**の 2 の目盛りと**対数ものさしB**の 1 の目盛りを合わせた。このとき，**対数ものさしB**の b の目盛りに対応する**対数ものさしA**の目盛りは a になった。



a と b の関係について，いつでも成り立つ式を，次の⓪～③のうちから一つ選べ。 **エ**

⓪　$a=b+2$　　　①　$a=2b$

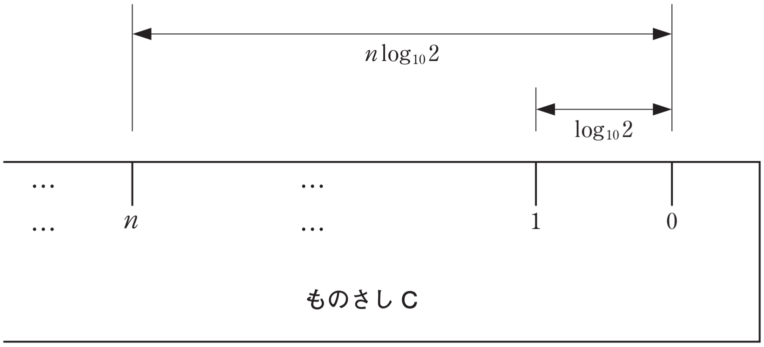
②　$a=\log_{10}(b+2)$　　　③　$a=\log_{10}2b$

（②は次ページに続く。）

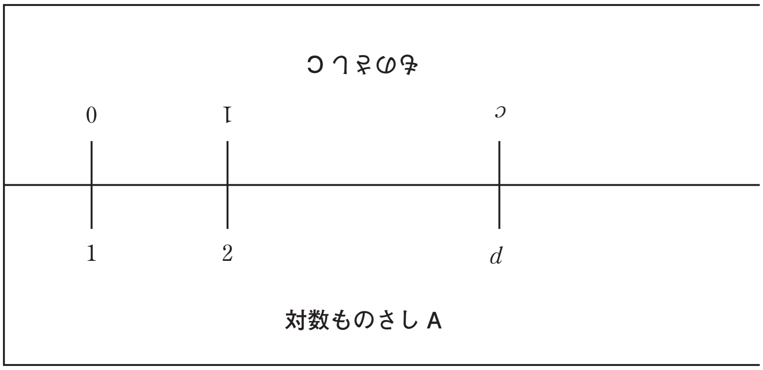
さらに，次のようにして**ものさしC**を作る。

ものさしC

自然数 n のそれぞれに対して，0 の目盛りから左に $n\log_{10}2$ だけ離れた場所に n の目盛りを書く。



(iii) 次の図のように**対数ものさしA**の 1 の目盛りと**ものさしC**の 0 の目盛りを合わせた。このとき，**ものさしC**の c の目盛りに対応する**対数ものさしA**の目盛りは d になった。



c と d の関係について，いつでも成り立つ式を，次の⓪～③のうちから一つ選べ。 **オ**

⓪ $d=2c$　　① $d=c^2$

② $d=2^c$　　③ $c=\log_{10}d$

(2は次ページに続く。)

(iv) **対数ものさしA**と**対数ものさしB**の目盛りを一度だけ合わせるか，**対数ものさしA**と**ものさしC**の目盛りを一度だけ合わせることにする。このとき，適切な箇所の目盛りを読み取るだけで実行できるものを，次の⓪～⑤のうちから**すべて選べ**。 カ

⓪ 17 に 9 を足すこと。

① 23 から 15 を引くこと。

② 13 に 4 をかけること。

③ 63 を 9 で割ること。

④ 2 を 4 乗すること。

⑤ $\log_2 64$ の値を求めること。

3　a を1でない正の実数とする。(i)～(iii)のそれぞれの式について，正しいものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

(i)　$\sqrt[4]{a^3} \times a^{\frac{2}{3}} = a^2$　　**ア**

(ii)　$\dfrac{(2a)^6}{(4a)^2} = \dfrac{a^3}{2}$　　**イ**

(iii)　$4(\log_2 a - \log_4 a) = \log_{\sqrt{2}} a$　　**ウ**

⓪　式を満たす a の値は存在しない。

①　式を満たす a の値はちょうど一つである。

②　式を満たす a の値はちょうど二つである。

③　どのような a の値を代入しても成り立つ式である。

< NOTE >

第2講 指数・対数関数

1 (1) $t^{\frac{1}{3}}=X$ とおくと，$t^{\frac{1}{3}}-t^{-\frac{1}{3}}=-3$ より $X-\dfrac{1}{X}=-3$

$$t^{\frac{2}{3}}+t^{-\frac{2}{3}}=X^2+\frac{1}{X^2}=\left(X-\frac{1}{X}\right)^2+2\cdot X\cdot\frac{1}{X}=(-3)^2+2=11$$

$$\left(t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}\right)^2=\left(X+\frac{1}{X}\right)^2=\left(X-\frac{1}{X}\right)^2+4\cdot X\cdot\frac{1}{X}=(-3)^2+4=13$$

$t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}>0$ より $t^{\frac{1}{3}}+t^{-\frac{1}{3}}=\sqrt{13}$

$$t-t^{-1}=X^3-\frac{1}{X^3}=\left(X-\frac{1}{X}\right)\left(X^2+1+\frac{1}{X^2}\right)=-3\cdot(11+1)=-36$$

(2) $x>0$，$y>0$，$X=\log_3 x$，$Y=\log_3 y$

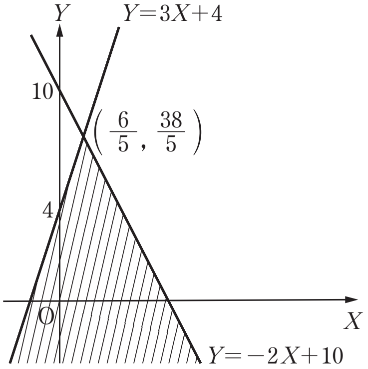
$\log_3\left(x\sqrt{y}\right)\leqq 5$ より $\log_3 x+\dfrac{1}{2}\log_3 y\leqq 5$ よって $X+\dfrac{1}{2}Y\leqq 5$

すなわち $2X+Y\leqq 10$ ……③

$\log_{81}\dfrac{y}{x^3}\leqq 1$ より $\dfrac{\log_3\frac{y}{x^3}}{\log_3 81}\leqq 1$ $\log_3 y-3\log_3 x\leqq 4$

よって $3X-Y\geqq -4$ ……④

③と④を満たす領域は右図斜線部分(境界含む)



よって，Yのとり得る最大の整数の値は7

また，$Y=7$ のとき

③より $2X+7\leqq 10$ つまり $X\leqq\dfrac{3}{2}$

④より $3X-7\geqq -4$ つまり $X\geqq 1$

よって $1\leqq X\leqq\dfrac{3}{2}$

すなわち $1\leqq\log_3 x\leqq\dfrac{3}{2}$ よって $3\leqq x\leqq 3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{27}$

これを満たす最大の整数の値は $x=5$

2 (1) $\log_{10}2=0.3010$ より $10^{0.3010}=2$ (❶)，$2^{\frac{1}{0.3010}}=10$ (❺)

(2)(i) 3の目盛りと4の目盛りの間隔は

$$\log_{10}4-\log_{10}3=\log_{10}\frac{4}{3}$$

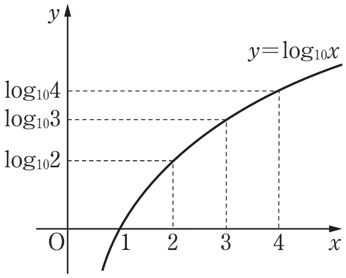
1の目盛りと2の目盛りの間隔は

$\log_{10}2-\log_{10}1=\log_{10}2$

底10は1より大きいので

$\log_{10}\dfrac{4}{3}<\log_{10}2$

したがって，3の目盛りと4の目盛りの間隔は，1の目盛りと2の目盛りの間隔より小さい（②）



(ii) 対数ものさしAの2の目盛りとaの目盛りの間隔と，対数ものさしBのbの目盛りと1の目盛りの間隔が等しいので

$\log_{10}a-\log_{10}2=\log_{10}b$

$\log_{10}a=\log_{10}2+\log_{10}b$

$\log_{10}a=\log_{10}2b$

よって　$a=2b$

したがって，aとbの関係について，いつでも成り立つ式は　①

(iii) 対数ものさしAのdの目盛りと2の目盛りの間隔と，ものさしCのcの目盛りと1の目盛りの間隔が等しいので

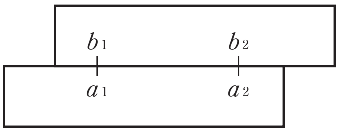
$c\log_{10}2-1\cdot\log_{10}2=\log_{10}d-\log_{10}2$

$\log_{10}2^c=\log_{10}d$

よって　$d=2^c$

したがって，cとdの関係について，いつでも成り立つ式は　②

(iv) 右図のように，対数ものさしAのa_1，a_2 $(a_1<a_2)$の目盛りと，対数ものさしBのb_1，b_2 $(b_1<b_2)$の目盛りがそれぞれ一致したとき



$\log_{10}a_2-\log_{10}a_1=\log_{10}b_2-\log_{10}b_1$

$\log_{10}\dfrac{a_2}{a_1}=\log_{10}\dfrac{b_2}{b_1}$

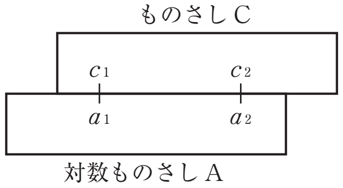
よって　$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{b_2}{b_1}$ ……①

したがって，$a_1=9$，$a_2=63$，$b_1=1$とすると，$b_2=7$となり，

63を9で割ること（③）により，割り切れて商が7であることがわかる。

①より $a_1b_2=a_2b_1$ ……②　　よって，$a_1=1$，$a_2=13$，$b_1=4$とすると，

$b_2=52$となり，13に4をかけること（②）により，積が52であることがわかる。



また右図のように，対数ものさしAの a_1，a_2 $(a_1<a_2)$ の目盛りと，ものさしCの c_1，c_2 $(c_1<c_2)$ の目盛りがそれぞれ一致したとき

$\log_{10}a_2-\log_{10}a_1=c_2\log_{10}2-c_1\log_{10}2$

$\log_{10}\dfrac{a_2}{a_1}=(c_2-c_1)\log_{10}2$

$\log_{10}\dfrac{a_2}{a_1}=\log_{10}2^{c_2-c_1}$

よって　$\dfrac{a_2}{a_1}=2^{c_2-c_1}$ ……③

したがって，$a_1=1$，$c_1=0$，$c_2=4$ とすると，$a_2=16$ となり，2を4乗すること（④）により，その値が16であることがわかる。

③より $\log_2\dfrac{a_2}{a_1}=c_2-c_1$ ……④　　よって，$a_1=1$，$a_2=64$，$c_1=0$ とすると，$c_2=6$ となり，$\log_2 64$ の値を求めること（⑤）により，その値が6であることがわかる。

また，⓪，①は，①～④のいずれの式を用いても実行できない。

以上より，適切な箇所の目盛りを読み取るだけで実行できるものは，②，③，④，⑤

3（i）$\sqrt[4]{a^3}\times a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}=a^{\frac{17}{12}}$

よって，$\sqrt[4]{a^3}\times a^{\frac{2}{3}}=a^2$ を満たす a の値は存在しない　（⓪）

（ii）$\dfrac{(2a)^6}{(4a)^2}=\dfrac{2^6a^6}{(2^2)^2a^2}=\dfrac{2^6a^6}{2^4a^2}=2^2a^4=4a^4$

$4a^4=\dfrac{a^3}{2}$ より　$8a^4-a^3=0$　　$a^3(8a-1)=0$　　$a>0$ より $a=\dfrac{1}{8}$

よって，$\dfrac{(2a)^6}{(4a)^2}=\dfrac{a^3}{2}$ を満たす a の値はちょうど一つである　（①）

（iii）$4(\log_2 a-\log_4 a)=4\left(\log_2 a-\dfrac{\log_2 a}{\log_2 4}\right)=4\cdot\dfrac{\log_2 a}{2}=2\log_2 a$

$\log_{\sqrt{2}} a=\dfrac{\log_2 a}{\log_2\sqrt{2}}=\dfrac{\log_2 a}{\frac{1}{2}}=2\log_2 a$

よって，$4(\log_2 a-\log_4 a)=\log_{\sqrt{2}} a$ はどのような a の値を代入しても成り立つ式である　（③）